EXERCICE 1

1. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_n \geqslant 4$ »

Initialisation : $u_0 = 7 \geqslant 4$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit k un entier naturel tel que $\mathscr{P}_k$ est vraie, i.e. tel que $u_k \geqslant 4$.

Dans ces conditions, $u_k + 12 \geqslant 16$ et, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $\sqrt{u_k+12} \geqslant \sqrt{16}$ soit encore $u_{k+1} \geqslant 4$ d'où $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie.

On a ainsi démontré que $\mathscr{P}_k$ vraie implique $\mathscr{P}_{k+1}$ vraie.

Conclusion : $\mathscr{P}_n$ est vraie pour $n=0$ et est héréditaire à partir de ce rang donc elle est vraie pour tout entier naturel n.

2. Commençons par remarquer que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad (4-u_n)(3+u_n) &= 12 + 4u_n - 3u_n - u_n^2 \\ &= -u_n^2 + u_n + 12\end{aligned}$$

De là :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n+12} - u_n \\ &= \frac{(\sqrt{u_n+12} - u_n)(\sqrt{u_n+12} + u_n)}{\sqrt{u_n+12} + u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{u_n+12})^2 - u_n^2}{\sqrt{u_n+12} + u_n} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 12}{\sqrt{u_n+12} + u_n} \\ &= \frac{(4-u_n)(3+u_n)}{\sqrt{u_n+12} + u_n}\end{aligned}$$

3. Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 4$ donc $4 - u_n \leqslant 0$, $3 + u_n \geqslant 7 > 0$ et $\sqrt{u_n+12} + u_n \geqslant 8 > 0$ donc $\dfrac{(4-u_n)(3+u_n)}{\sqrt{u_n+12}+u_n} \leqslant 0$, ce qui équivaut à $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ soit encore à $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Conclusion : (u_n) est décroissante.

EXERCICE 2

1. Réponse exacte : $\mathscr{C}_p$ admet exactement une asymptote horizontale et une verticale.

Explications : $\lim\limits_{x\to 1} p(x) = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_p$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_p$.

$\mathscr{C}_p$ n'admet pas d'autre asymptote car la limite de p en $-\infty$ est infinie et que la limite de p en 6 est finie.

2. Réponse exacte : La courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

Explications : f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, f ne peut admettre de limite infinie en un réel et sa courbe ne peut donc admettre d'asymptote verticale.

3. Réponse exacte : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+4}{f(x)} = 1$

Explications : Pour x suffisamment grand, $\dfrac{f(x)+4}{f(x)} = \dfrac{f(x)}{f(x)} + \dfrac{4}{f(x)} = 1 + \dfrac{4}{f(x)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4}{f(x)} = 1$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)+4}{f(x)} = 1$.

Les deux autres propositions correspondent à des cas d'indétermination (respectivement « $\infty - \infty$ » et « $0 \times \infty$ »).

4. Réponse exacte : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x) = 1$

Explications : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = 1$ donc, par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x) = 1$.

Pour ce qui concerne les deux autres propositions, les limites exactes sont $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-f(x))^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

5. Réponse exacte : $g(x) = \dfrac{3x^2}{(x-2)^2}$

Explications : La courbe représentative de g admet pour asymptotes les droites d'équations $x = 2$ et $y = 3$ donc g est une fonction non définie en 2 et qui admet pour limite 3 en $-\infty$ ou en $+\infty$.

$x \mapsto \dfrac{3x^2}{x^2-2}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$ et peut donc être écartée.

$x \mapsto \dfrac{3x^2}{x-2}$ et $x \mapsto \dfrac{3x^2}{x^2-2}$ sont deux fonctions rationnelles. Or, en l'infini, une fonction rationnelle admet même limite que le quotient simplifié des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

$\forall x \neq 0 \quad \dfrac{3x^2}{x} = 3x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{x-2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{x-2} = +\infty$ d'où l'on peut écarter l'expression $\dfrac{3x^2}{x-2}$.

$g(x)$ ne peut être que $\dfrac{3x^2}{(x-2)^2}$. On peut d'ailleurs vérifier que $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{3x^2}{(x-2)^2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2}{(x-2)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{(x-2)^2} = 3$.

6. Réponse exacte : $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = +\infty$

Explications : $\lim\limits_{x\to3} -2x + 1 = -5$ et $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} x - 3 = 0^{(-)}$ donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} h(x) = +\infty$.

7. Réponse exacte : k a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$.

Explications : Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes.

$\forall x > 0 \quad 1 + \dfrac{2}{x} < k(x) < 1 + \dfrac{3}{x}$; or, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{3}{x} = 1$ donc, d'après le théorème des gendarmes, k admet une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$.

8. Réponse exacte : k a une limite à droite en 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} k(x) = +\infty$.

Explications : Il suffit d'appliquer un théorème de comparaison (ici, théorème de minoration).

$\forall x > 0 \quad k(x) > 1 + \dfrac{2}{x}$; or, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} 1 + \dfrac{2}{x} = +\infty$ donc k admet une limite à droite en 0 et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} k(x) = +\infty$.

Exercice 3

1. La section du cube par le plan (MNP) est un hexagone.

L'intersection des plans (MNP) et (ADH) est la parallèle à (MN) qui passe par P.

En effet, (BCG) et (ADH) sont parallèles et, si deux plans sont parallèles alors tout plan qui coupe l'un, coupe l'autre, et les droites d'intersection sont parallèles.

2. Méthode : Pour montrer qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de montrer qu'elle est parallèle à une droite incluse dans ce plan.

Dans le triangle BCF, les points B, M, F, d'une part, et B, N, C, d'autre part, sont alignés dans cet ordre et $\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{3}{4}$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (FC) sont parallèles.

Comme (FC) est incluse dans le plan (EDF), la droite (MN) est parallèle au plan (EDF).

3. Méthode : Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes incluses dans ce plan (théorème de la porte).

La droite (AB) est prependiculaire au plan (BCF) (car elle est perpendiculaire à (BC) et à (BF) qui sont deux droites sécantes incluses dans le plan (BCF)) donc elle est orthogonale à toute droite incluse dans ce plan donc, en particulier, à (MN).

(BG) et (FC) sont perpendiculaires car ce sont les diagonales du carré $BCGF$. Or, (MN) est parallèle à (FC) donc (MN) est orthogonale (et même perpendiculaire) à (BG).

Ainsi, (MN) est orthogonale à (BG) et à (AB), droites sécantes incluses dans le plan (ABH), d'où (MN) est perpendiculaire à ce plan.

4. Méthode : Pour montrer que deux plans sont perpendiculaires, il suffit de montrer que l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

La droite (MN) est perpendiculaire à (BG). La première étant incluse dans le plan (MNE) et la seconde étant incluse dans le plan (ABH), le plan (MNE) contient une droite perpendiculaire au plan (ABH) donc ces deux plans sont perpendiculaires.

5. Les plans (MNA) et (EDF) ne sont ni confondus (car A n'appartient pas à (EDF)) ni strictement parallèles (car le point d'intersection des droites (AM) et (EF), que l'on nomme Q dans la suite) appartient à chacun de ces deux plans) donc ils sont sécants et leur intersection est une droite qui passe par Q.

Méthode 1 : (MN) est parallèle à (MNA) (car incluse dans celui-ci) et à (EDF) (car parallèle à (FC), droite incluse dans (EDF)) donc elle est parallèle à la droite d'intersection de ces deux plans.

En effet, si une droite est parallèle à deux plans sécants alors elle est parallèle à leur droite d'intersection (théorème du toit).

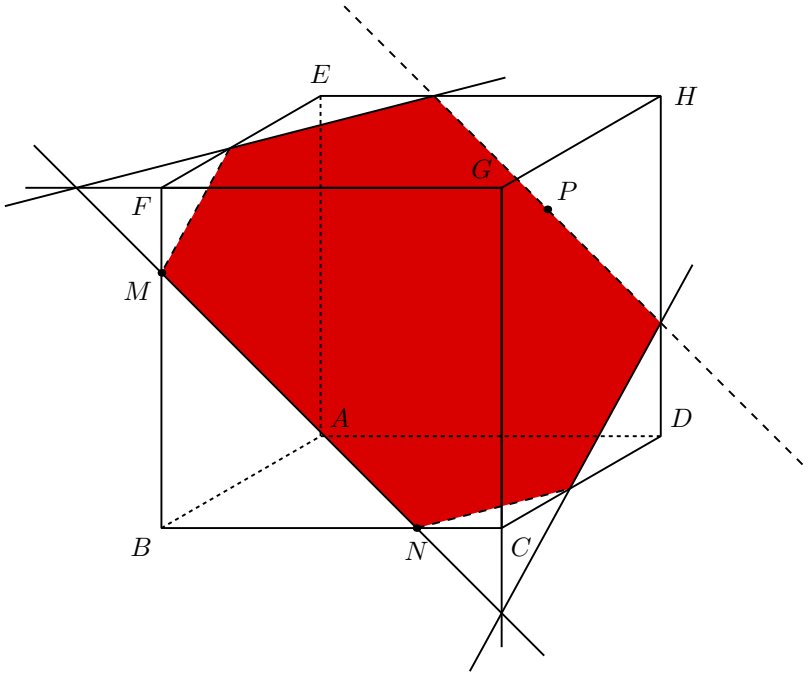
Conclusion : L'intersection des plans (MNA) et (EDF) est la droite parallèle à (MN) qui passe par Q.

Méthode 2 : (AN) et (CD) sont sécantes en un point que l'on nomme R.

(AN) étant incluse dans (MNA) et (CD) étant incluse dans (EDF), le point R appartient à (MNA) et à (EDF).

Conclusion : L'intersection des plans (MNA) et (EDF) est la droite (QR).

6. Méthode : Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux droites sécantes incluses dans le premier sont respectivement parallèles à deux droites incluses dans le second.

Le plan (BDE) est strictement parallèle à (FHC).

En effet, (BE) et (BD) sont deux droites sécantes incluses dans le plan (BDE) et sont respectivement parallèles à (CH) et (FH), droites incluses dans le plan (FHC).