Exercice 1

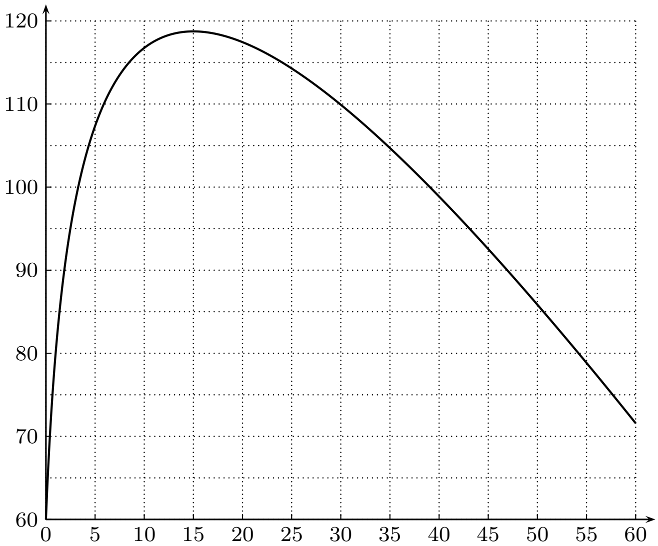
Au cours d'une étude sur les rythmes cardiaques, on note toutes les cinq minutes à partir du temps $t = 0$ correspondant au début de l'épreuve physique, le rythme cardiaque, exprimé en pulsations par minute, d'un sportif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 60]$ par :

$$f(t) = -2t + 60 + 73{,}7 \log(t + 1)$$

Les résultats obtenus ont permis d'affirmer que $f(t)$ est une bonne estimation du rythme cardiaque à l'instant t exprimé en minutes.

1. Déterminer une estimation du rythme cardiaque de ce sportif au début de l'épreuve, puis au bout d'une demi-heure.

2. On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f sur $[0; 60]$.



Répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique.

a) Au bout de combien de temps le rythme cardiaque est-il maximal ? Quelle valeur atteint-il ?

b) Au bout de combien de temps le rythme cardiaque est-il de 90 pulsations par minute ?

c) Dans les conditions l'épreuve, on considère qu'une personne est en très bonne condition physique lorsque la durée pendant laquelle son coeur bat à plus de 1,5 fois sa vitesse au repos n'excède pas 20 minutes.
Ce sportif est-il en très bonne condition physique ?

d) De même, une personne est considérée en mauvaise condition physique lorsque son rythme cardiaque dépasse le double du rythme au repos.
Ce sportif est-il en mauvaise condition physique ?

Exercice 2

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. Le pH d'une solution est égal à l'opposé du logarithme décimal de sa concentration en ions hydronium.
Autrement dit, $pH = -\log([H_3O^+])$.

a) Sachant qu'un litre d'eau contient 10^{-7} moles de H_3O^+, retrouver le pH de l'eau pure.

b) Une solution contient 5×10^{-4} moles de H_3O^+ par litre, donner une valeur approchée à 0,1 près du pH de cette solution.

2. La magnitude d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par $M = \log\left({}^{I}\!/\!{}_{I_0}\right)$ où I_0 est une intensité de référence. Quelle était la magnitude du séisme qui a touché l'Indonésie en 1993 sachant que $I = 6{,}3 \times 10^6 I_0$?

Exercice 3

Au cours d'une réaction chimique, on note $C(t)$ la concentration du réactif, (exprimée en mol.L^{-1}) à l'instant t (exprimé en minutes).
On admet que la fonction C est définie sur $[0; 1000]$ par :

$$C(t) = 0{,}1 \times 0{,}99^t$$

1. Calculer la concentration à l'instant 0, appelée par la suite concentration initiale.

2. En déduire le temps de demi-réaction, c'est-à-dire l'instant t_0 pour lequel la concentration est égale à la moitié de la concentration initiale. On donnera la valeur décimale arrondie à la minute la plus proche.

3. Au bout de combien de temps la concentration devient-elle inférieure à 10 % de la concentration initiale ?

Exercice 4

Le taux de glycémie (glucose dans le sang) doit rester stable ; ce taux est normal lorsqu'il est inférieur à 1,1 g/L.
Après le pic d'une crise, le taux de glycémie (exprimé en g/L) d'un patient en fonction du temps t (exprimé en minutes) est donné par $f(t) = 2 \times 0{,}982^t$.
Au bout de combien de temps le taux de glycémie de ce patient devient-il normal ?

Exercice 5

1. Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 0,99.

a) Exprimer u_n en fonction de n.

b) Déterminer algébriquement le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant 0{,}01$.

2. Soit (w_n) la suite géométrique de premier terme $w_0 = 0{,}1$ et de raison 1,02.

a) Exprimer w_n en fonction de n.

b) Déterminer algébriquement le plus petit entier naturel n tel que $w_n \geqslant 3$.

3. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leqslant w_n$.

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\log(3x+1) = \log(x-5)$;

2. $\log(3x+1) = \log(4x-5)$;

3. $\log(3x+1) > \log(4x-5)$;

4. $\log(x) + \log(2) > 3$.

Exercice 7

Le niveau sonore L en décibels (dB) permet de distinguer un son fort d'un son faible perçu par l'oreille humaine.
Un bruit devient dangereux pour l'oreille humaine à partir de 90 dB et le seuil de la douleur est de 120 dB.
Le niveau sonore L en décibels s'exprime en fonction de la pression acoustique p (en pascals) par la relation
$L(p) = 20 \times \log(5 \times 10^4 p)$ pour p appartenant à $[2 \times 10^{-5}; 25]$.

1. Quelle est, en pascal, la pression correspondant à un niveau sonore de 0 dB ?

2. À partir de quelle pression un bruit devient-il dangereux pour l'oreille humaine ?

3. Déterminer algébriquement la valeur exacte de la pression correspondant au seuil de la douleur.

Exercice 8

1. Soit N un entier naturel dont l'écriture décimale comporte 5 chiffres. Encadrer N par deux puissances de 10.

2. Soit N un entier naturel non nul et p le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de N.

a) Encadrer N par deux puissances de 10.

b) Prouver que $p = 1+E(\log(N))$ où E désigne la partie entière.

3. En 2008, le plus grand nombre premier connu était $N = 2^{43112609} - 1$. Déterminer le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de ce nombre.

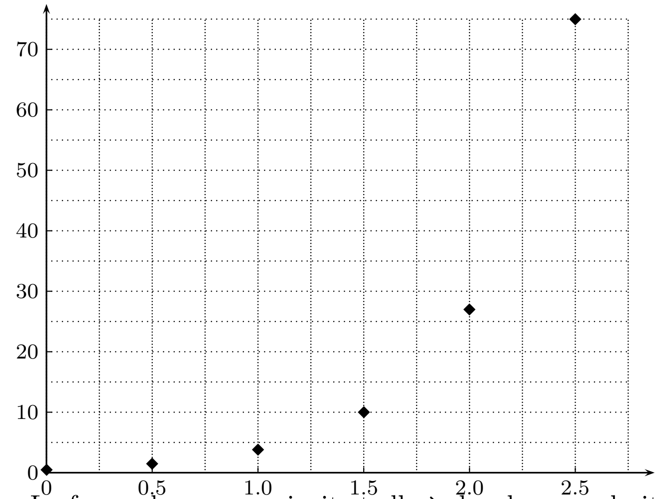
Exercice 9

Une population homogène de bactéries placées dans un milieu stable, se multiplie par mitose. Dans ce problème, on va s'intéresser à l'évolution de la densité bactérienne en fonction du temps. La densité bactérienne représente le nombre de bactéries par mm^3 et le temps est exprimé en secondes.

1. Une série de six mesures expérimentales a donné les résultats suivants :

Temps x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Densité d_i	0,5	1,5	3,8	10	27	75

Le nuage de points correspondant est donné ci-dessous.



La forme de ce nuage incite-t-elle à chercher une droite d'ajustement ?

2. On pose $y_i = \log(d_i)$.

a) Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant, en arrondissant les valeurs de y à 10^{-1} près.

x_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y_i = \log(d_i)$						

b) Représenter le nuage de points $M_i\,(x_i ; y_i)$ dans un repère orthonormal d'unité graphique 5 cm.

Peut-on envisager un ajustement affine de ce nuage ?

3. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage de points M_i.

4. Soit Δ la droite d'équation $y = 0{,}88x - 0{,}3$.

a) Construire Δ sur la figure de la question **2b**.

b) Le point G appartient-il à la droite Δ ? Justifier.

5. On admet que la droite Δ réalise un bon ajustement du nuage de points M_i.

a) Quelle densité bactérienne peut-on prévoir à l'instant $x = 4$?

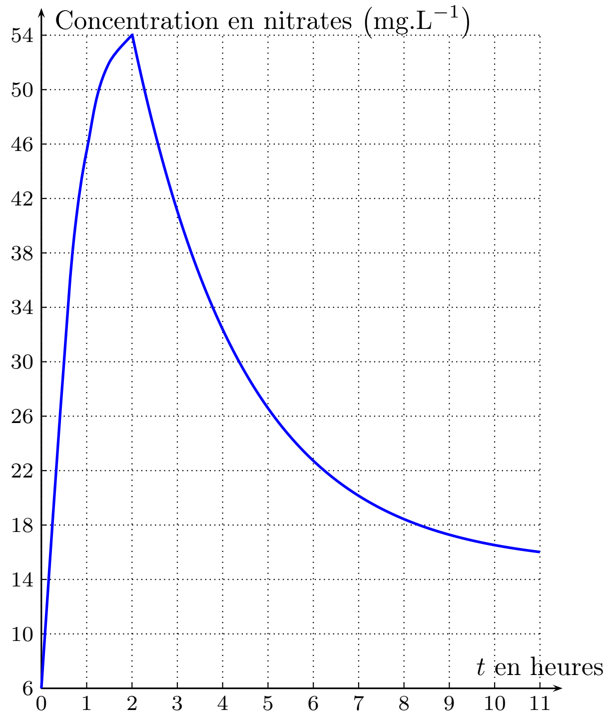
b) Justifier l'affirmation suivante : « On peut considérer que la densité bactérienne d_i est donnée en fonction du temps x_i par $d_i = 0{,}50 \times 7{,}59^{x_i}$. »

Exercice 10

Dans une station de pompage, un technicien contrôle la concentration en nitrates de l'eau prélevée dans une rivière avant qu'elle soit traitée pour la rendre potable. Ce jour-là, il commence ses mesures à l'instant où une averse s'abat sur la région.

La courbe donnée ci-dessous a été réalisée à partir des mesures effectuées. Elle représente la concentration en nitrates, exprimée en mg.L^{-1}, en fonction du temps t, exprimé en heures, pour les valeurs de t appartenant à $[0; 11]$.

Partie A



1. Déterminer la concentration en nitrates lorsque le technicien commence ses mesures.

2. Déterminer l'instant où la concentration en nitrates est maximale et sa valeur à cet instant.

3. Décrire l'évolution de la concentration en nitrates présents dans l'eau.

4. Afin de limiter les risques pour la population, la concentration maximale en nitrates est fixée à 50 mg.L^{-1}.

Indiquer la période durant laquelle cette concentration dépasse la norme autorisée.

Partie B

On admet que la courbe donnée dans la première partie représente, sur l'intervalle $[2; 11]$, la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{88}{1{,}5^t} + 15$$

1. Calculer l'image de 2 par la fonction f puis en donner l'arrondi à 10^{-2} près.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[2{,}1; 11]$ et on note f' la dérivée de f.

À l'aide du graphique, indiquer le signe de f'.

3. a) Quelle information sur l'évolution de la concentration en nitrates la résolution de l'inéquation $f(t) \leqslant 50$ permet-elle d'obtenir ?

b) Résoudre algébriquement cette inéquation dans l'intervalle $[2; 11]$.