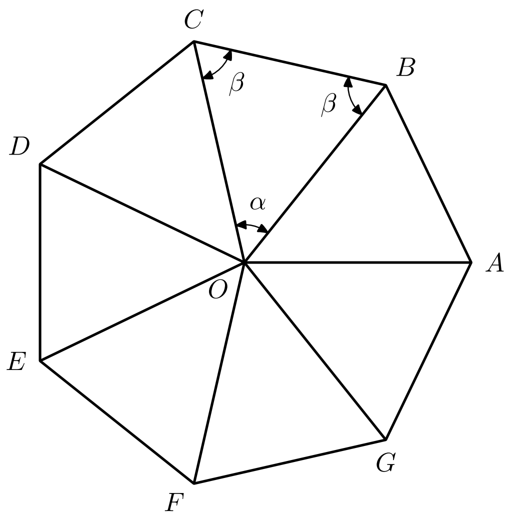
Les alvéoles des ruches d'abeilles ont une ouverture hexagonale. Quel intérêt cette structure présente-t-elle ?

Il s'agit de réaliser un pavage du plan par des polygones, c'est-à-dire couvrir le plan en juxtaposant des polygones sans qu'ils se chevauchent). Les alvéoles étant toutes identiques et possédant des propriétés de symétrie, étudions comment paver le plan avec des polygones réguliers tous identiques.
Dans la suite, on considère un polygone régulier à n côtés où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et les mesures des angles sont données en degrés.

1. On donne ci-dessous, pour illustration, le cas où $n = 7$.

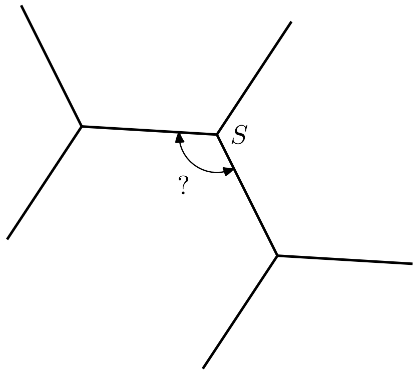


a) Exprimer l'angle α en fonction de n.

b) En déduire que $2\beta = 180 - \dfrac{360}{n}$.

2. On veut assembler k polygones réguliers à n côtés, tous identiques, en S.

On donne ci-dessous, pour illustration, le cas où $k = 3$.



Que doit valoir le produit $k \times 2\beta$?

En déduire que $k = \dfrac{2n}{n-2}$.

3. Calculer la valeur de k pour chaque entier n appartenant à $[3; 7]$.

4. Établir que : $\forall n \geqslant 7 \quad k < 3$

5. Dresser la liste des polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan.

6. Soit P le périmètre d'un polygone régulier et A son aire.

a) Vérifier que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

b) Prouver que, dans le cas d'un triangle équilatéral, $P = \sqrt{12\sqrt{3}}\sqrt{A}$.

c) Montrer que, dans le cas d'un hexagone régulier, $P = \sqrt{8\sqrt{3}}\sqrt{A}$.

d) Exprimer P en fonction de A pour un carré.

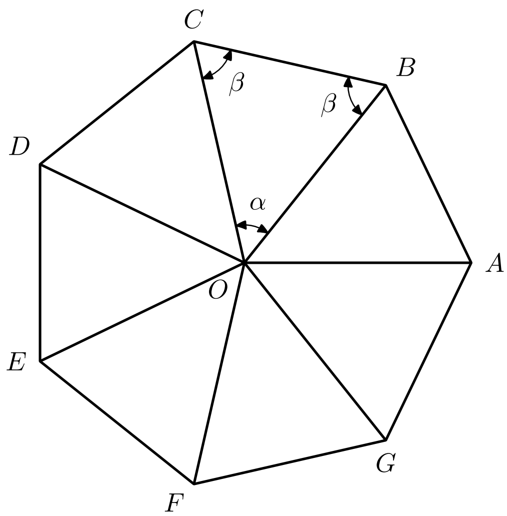
e) Pour une aire fixée, quel est celui, des polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan, qui a le plus petit périmètre ?

7. Quel est le pavage qui permet à l'abeille de faire une économie de cire autour des alvéloles ?

Les alvéoles des ruches d'abeilles ont une ouverture hexagonale. Quel intérêt cette structure présente-t-elle ?

Il s'agit de réaliser un pavage du plan par des polygones, c'est-à-dire couvrir le plan en juxtaposant des polygones sans qu'ils se chevauchent). Les alvéoles étant toutes identiques et possédant des propriétés de symétrie, étudions comment paver le plan avec des polygones réguliers tous identiques.
Dans la suite, on considère un polygone régulier à n côtés où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 et les mesures des angles sont données en degrés.

1. On donne ci-dessous, pour illustration, le cas où $n = 7$.

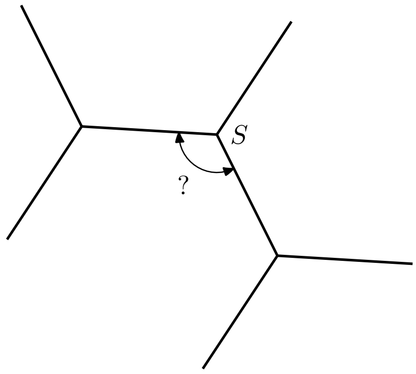


a) Exprimer l'angle α en fonction de n.

b) En déduire que $2\beta = 180 - \dfrac{360}{n}$.

2. On veut assembler k polygones réguliers à n côtés, tous identiques, en S.

On donne ci-dessous, pour illustration, le cas où $k = 3$.



Que doit valoir le produit $k \times 2\beta$?

En déduire que $k = \dfrac{2n}{n-2}$.

3. Calculer la valeur de k pour chaque entier n appartenant à $[3; 7]$.

4. Établir que : $\forall n \geqslant 7 \quad k < 3$

5. Dresser la liste des polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan.

6. Soit P le périmètre d'un polygone régulier et A son aire.

a) Vérifier que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté x est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

b) Prouver que, dans le cas d'un triangle équilatéral, $P = \sqrt{12\sqrt{3}}\sqrt{A}$.

c) Montrer que, dans le cas d'un hexagone régulier, $P = \sqrt{8\sqrt{3}}\sqrt{A}$.

d) Exprimer P en fonction de A pour un carré.

e) Pour une aire fixée, quel est celui, des polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan, qui a le plus petit périmètre ?

7. Quel est le pavage qui permet à l'abeille de faire une économie de cire autour des alvéloles ?