Énoncés

Exercice 1 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-006/texte*

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A\,(2; 8)$, $B\,(-6; 4)$ et $C\,(x; -7)$.

1. Calculer x pour que le triangle ABC soit rectangle en B.

2. Calculer les coordonnées du point M, milieu de $[AC]$.

3. Soit D le symétrique de B par rapport à M. Calculer les coordonnées de D.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
On justifiera la réponse sans effectuer le moindre calcul.

5. Calculer l'aire du quadrilatère $ABCD$ et son périmètre (on donnera ce résultat sous la forme $a\sqrt{b}$, a et b entiers, b le plus petit possible).

6. a) Développer, réduire et ordonner $(z-6)(4z+19)$.

b) Soit $E\,(z; z)$. Calculer z pour que le triangle BDE soit rectangle en E.
Montrer qu'il y a deux solutions correspondant à deux points E_1 et E_2.

7. Démontrer, sans calculs, que les points A, B, C, D, E_1 et E_2 sont situés sur un même cercle que l'on précisera.

Exercice 2 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-017/texte*

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A\,(2; 8)$, $B\,(-6; 4)$ et $C\,(-4; 0)$.

1. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure de l'exercice. Conjecturer la nature du triangle ABC.

2. Prouver la conjecture émise à la question précédente.

3. Calculer les coordonnées du point M, milieu de $[AC]$.

4. Soit D le symétrique de B par rapport à M. Calculer les coordonnées de D.

5. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
On justifiera la réponse sans effectuer le moindre calcul.

6. a) Développer, réduire et ordonner $(4x+4)(x-4)$.

b) Dans cette question, x désigne un réel et E le point de coordonnées $(x; x)$.
Déterminer algébriquement la valeur de x sachant que E est un point distinct de D et que le triangle ACE est rectangle en E.

7. Démontrer, sans aucun calcul, que les points A, B, C, D et E sont situés sur un même cercle que l'on précisera.

Exercice 3 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-018/texte*

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne $A\,(-3; 6)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(5; -2)$ et $D\,(-2; -1)$.

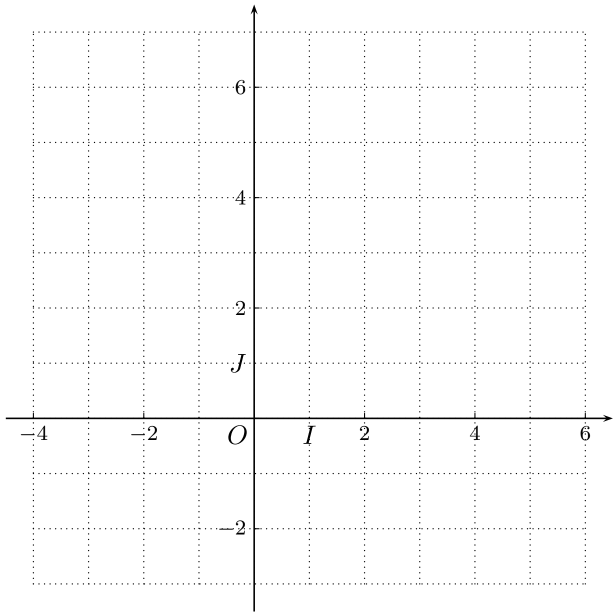
1. Placer les points A, B, C et D sur la figure ci-dessous.

2. Calculer les coordonnées du milieu M de $[BD]$.

3. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Calculer AB.

5. Démontrer que $ABCD$ est un losange.



Exercice 4 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-019/texte*

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on donne $A\,(-3; 2)$, $B\,(3; 5)$, $C\,(5; 1)$ et $D\,(-1; -2)$.

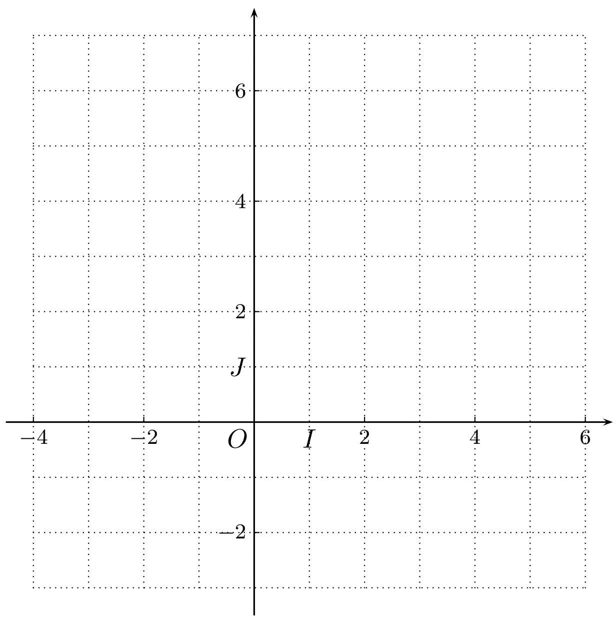
1. Placer les points A, B, C et D sur la figure ci-dessous.

2. Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.

3. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Calculer BD.

5. Démontrer que $ABCD$ est un rectangle.



Exercice 5 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-020/texte*

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points $A\,(8; 0)$, $B\,(0; 7)$, C le milieu de $[AB]$ et D celui de $[CB]$.

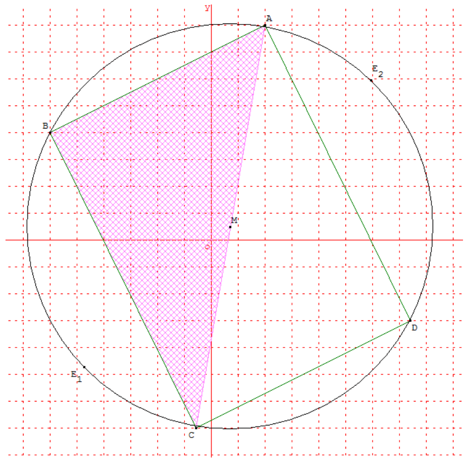
1. Réaliser une figure soignée. Que peut-on conjecturer concernant la nature du triangle OAD ?

2. Calculer les coordonnées du point C puis celles de D.

3. Calculer AD, donner le résultat arrondi au centième, puis conclure quant à la conjecture émise à la première question.

Corrigés

Exercice 1 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-006/corrige*



1. Je calcule x pour que le triangle ABC soit rectangle en B :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (-6-2)^2 + (4-8)^2 \\ &= (-8)^2 + (-4)^2 \\ &= 64 + 16 \\ &= 80 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \\ &= (x-2)^2 + (-7-8)^2 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 + (-15)^2 \\ &= x^2 - 4x + 4 + 225 \\ &= x^2 - 4x + 229 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (x-(-6))^2 + (-7-4)^2 \\ &= (x+6)^2 + (-11)^2 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2 + 121 \\ &= x^2 + 12x + 36 + 121 \\ &= x^2 + 12x + 157 \end{aligned}$$

Le triangle ABC est rectangle en B si, et seulement si, $AB^2 + BC^2 = AC^2$. Or :

$$\begin{aligned} AB^2+BC^2=AC^2 &\iff 80+x^2+12x+157=x^2-4x+229 \\ &\iff x^2+12x+237 = x^2-4x+229 \\ &\iff 12x+237 = -4x+229 \\ &\iff 12x+4x = 229-237 \\ &\iff 16x = -8 \\ &\iff x = -\frac{8}{16} \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \text{ ou } -0{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion : Le triangle ABC est rectangle en B si, et seulement si, $x = -0{,}5$.

2. Je calcule les coordonnées du point M, milieu de $[AC]$.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ &= \frac{2+(-0{,}5)}{2} \\ &= \frac{1{,}5}{2} \\ &= 0{,}75 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_M &= \frac{y_A + y_C}{2} \\ &= \frac{8+(-7)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Conclusion : Le point M a pour coordonnées $(0{,}75; 0{,}5)$.

3. Je calcule les coordonnées du point D, symétrique de B par rapport à M.

Dire que le point D est le symétrique de B par rapport à M signifie que M est le milieu de $[BD]$.

$$\begin{aligned} x_M = \frac{x_B + x_D}{2} &\iff 0{,}75 = \frac{-6 + x_D}{2} \\ &\iff 1{,}5 = -6 + x_D \\ &\iff 1{,}5 + 6 = x_D \\ &\iff 7{,}5 = x_D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M = \frac{y_B + y_D}{2} &\iff 0{,}5 = \frac{4 + y_D}{2} \\ &\iff 1 = 4 + y_D \\ &\iff 1 - 4 = y_D \\ &\iff -3 = y_D \end{aligned}$$

Conclusion : Le point D a pour coordonnées $(7{,}5; -3)$.

4. Je détermine la nature du quadrilatère $ABCD$:

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu donc il s'agit d'un parallélogramme.

De plus, le triangle ABC étant rectangle en B, le parallélogramme $ABCD$ admet un angle droit donc il s'agit d'un rectangle.

Conclusion : Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

5. Je calcule l'aire et le périmètre du quadrilatère $ABCD$:

On sait que $AB^2 = 80$ (calcul effectué précédemment). Or, $AB \geqslant 0$ donc $AB = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= (-0{,}5 - (-6))^2 + (-7-4)^2 \\ &= 5{,}5^2 + (-11)^2 \\ &= 30{,}25 + 121 \\ &= 151{,}25 \end{aligned}$$

Or, $BC \geqslant 0$ donc $BC = \sqrt{151{,}25} = \dfrac{11\sqrt{5}}{2}$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{ABCD} &= AB \times BC \\ &= 110 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathscr{P}_{ABCD} &= 2 \times (AB + BC) \\ &= 19\sqrt{5} \end{aligned}$$

6. a) Je développe, réduis et ordonne $(z-6)(4z+19)$:

$$\begin{aligned} (z-6)(4z+19) &= 4z^2 + 19z - 24z - 114 \\ &= 4z^2 - 5z - 114 \end{aligned}$$

b) Je calcule z pour que le triangle BDE soit rectangle en E :

$$\begin{aligned} BE^2 &= (z+6)^2 + (z-4)^2 \\ &= z^2 + 12z + 36 + z^2 - 8z + 16 \\ &= 2z^2 + 4z + 52 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DE^2 &= (z-7{,}5)^2 + (z+3)^2 \\ &= z^2 - 15z + 56{,}25 + z^2 + 6z + 9 \\ &= 2z^2 - 9z + 65{,}25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BD^2 &= (7{,}5+6)^2 + (-3-4)^2 \\ &= 13{,}5^2 + (-7)^2 \\ &= 182{,}25 + 49 \\ &= 231{,}25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Le triangle } BDE \text{ soit rectangle en } E \\ \iff{} & BE^2 + DE^2 = BD^2 \\ \iff{} & 2z^2 + 4z + 52 + 2z^2 - 9z + 65{,}25 = 231{,}25 \\ \iff{} & 4z^2 - 5z + 117{,}25 = 231{,}25 \\ \iff{} & 4z^2 - 5z + 117{,}25 - 231{,}25 = 0 \\ \iff{} & 4z^2 - 5z - 114 = 0 \\ \iff{} & (z-6)(4z+19) = 0 \end{aligned}$$

Règle du produit nul : Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul.

Le triangle BDE soit rectangle en E
$\iff z-6=0$ ou $4z+19=0$
$\iff z=6$ ou $4z=-19$
$\iff z=6$ ou $z=\dfrac{-19}{4}$
$\iff z=6$ ou $z=-4{,}75$

Conclusion : Il y a deux points solutions : $E_1(6;6)$ et $E_2(-4{,}75;-4{,}75)$.

7. Les triangles ABD, CBD, E_1BD et E_2BD sont tous quatre rectangles d'hypoténuse $[BD]$.

Par conséquent, les points A, B, C, D, E_1 et E_2 sont cocycliques et appartiennent au cercle de diamètre $[BD]$.

Exercice 2 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-017/corrige*

1. Il semble que le triangle ABC soit rectangle en B.

2. Je commence par calculer AB^2, AC^2 et BC^2 :

$$\begin{aligned}AB^2&=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2\\&=(-6-2)^2+(4-8)^2\\&=(-8)^2+(-4)^2\\&=64+16\\&=\boxed{80}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AC^2&=(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2\\&=(-4-2)^2+(0-8)^2\\&=(-6)^2+(-8)^2\\&=36+64\\&=\boxed{100}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}BC^2&=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2\\&=(-4-(-6))^2+(0-4)^2\\&=2^2+(-4)^2\\&=4+16\\&=\boxed{20}\end{aligned}$$

De ces résultats, je déduis que $AB^2+BC^2=80+20=100=AC^2$ donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Conclusion : La conjecture émise à la première question est validée, le triangle ABC est rectangle en B.

3. Je calcule les coordonnées du point M, milieu de $[AC]$.

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+(-4)}{2}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}\qquad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{8+0}{2}=\frac{8}{2}=\boxed{4}$$

Conclusion : Le point M a pour coordonnées $(-1;4)$.

4. Je calcule les coordonnées du point D, symétrique de B par rapport à M.

Dire que le point D est le symétrique de B par rapport à M signifie que M est le milieu de $[BD]$.

$$x_M=\frac{x_B+x_D}{2}\iff -1=\frac{-6+x_D}{2}\iff -2=-6+x_D\iff -2+6=x_D\iff \boxed{4=x_D}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_D}{2}\iff 4=\frac{4+y_D}{2}\iff 8=4+y_D\iff 8-4=y_D\iff \boxed{4=y_D}$$

Conclusion : Le point D a pour coordonnées $(4;4)$.

5. Je détermine la nature du quadrilatère $ABCD$:

Les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu donc il s'agit d'un parallélogramme.

De plus, le triangle ABC étant rectangle en B, le parallélogramme $ABCD$ admet un angle droit donc il s'agit d'un rectangle.

Conclusion : Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

6. a) Je développe, réduis et ordonne $(4x+4)(x-4)$:

$$\begin{aligned}(4x+4)(x-4)&=4x^2-16x+4x-16\\&=\boxed{4x^2-12x-16}\end{aligned}$$

b) J'exprimer BE^2 puis DE^2 en fonction de x :

$$\begin{aligned}BE^2&=(x+6)^2+(x-4)^2\\&=x^2+12x+36+x^2-8x+16\\&=\boxed{2x^2+4x+52}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DE^2&=(x-4)^2+(x-4)^2\\&=x^2-8x+16+x^2-8x+16\\&=\boxed{2x^2-16x+32}\end{aligned}$$

Le triangle BDE soit rectangle en E
$\iff BE^2+DE^2=BD^2$
$\iff 2x^2+4x+52+2x^2-16x+32=10^2$
$\iff 4x^2-12x+84=100$
$\iff 4x^2-12x+84-100=0$
$\iff 4x^2-12x-16=0$
$\iff (4x+4)(x-4)=0$

Règle du produit nul : Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul.

Le triangle BDE soit rectangle en E
$\iff 4x+4=0$ ou $x-4=0$
$\iff 4x=-4$ ou $x=4$
$\iff x=\dfrac{-4}{4}$ ou $x=4$
$\iff \boxed{x=-1}$ ou $\boxed{x=4}$

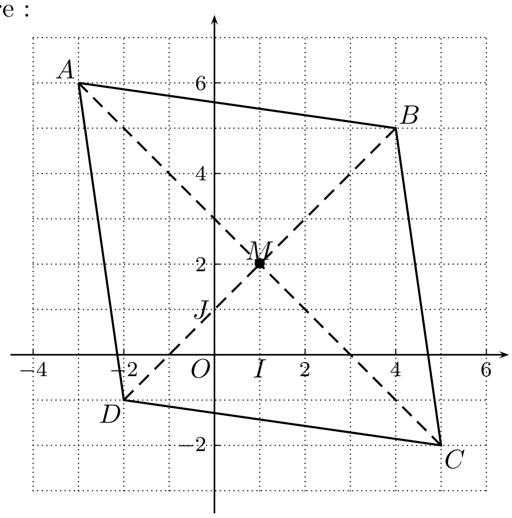
Le point E étant distinct de D, j'en déduis qu'il a pour coordonnées $\boxed{(-1;-1)}$.

7. Les triangles ABC, ADC et AEC sont tous trois rectangles d'hypoténuse $[AC]$.

Par conséquent, les points A, B, C, D et E sont cocycliques et appartiennent au cercle de diamètre $[AC]$.

Exercice 3 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-018/corrige*

1. Figure :



2. Je calcule les coordonnées du point M, milieu de $[BD]$.

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \qquad y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+(-1)}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

Conclusion : Le point M a pour coordonnées $(1;2)$.

3. Je calcule les coordonnées du point N, milieu de $[AC]$.

$$x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \qquad y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6+(-2)}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$$

Le point N a pour coordonnées $(1;2)$ donc M et N sont confondus et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu d'où $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Je calcule AB :

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \\ &= (4-(-3))^2 + (5-6)^2 \\ &= 7^2 + (-1)^2 \\ &= 49 + 1 \\ &= \boxed{50} \end{aligned}$$

Or, $AB \geqslant 0$ donc $\boxed{AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}}$.

5. Je calcule AD :

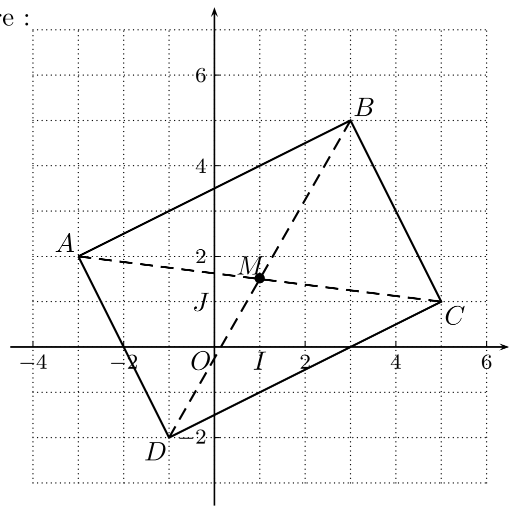
$$\begin{aligned} AD^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 \\ &= (-2-(-3))^2 + (-1-6)^2 \\ &= 1^2 + (-7)^2 \\ &= 1 + 49 \\ &= \boxed{50} \end{aligned}$$

Or, $AD \geqslant 0$ donc $\boxed{AD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}}$.

Ainsi, le parallélogramme $ABCD$ a deux côtés consécutifs de même longueur ($AB = AD = 5\sqrt{2}$) d'où $ABCD$ est un losange.

Exercice 4 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-019/corrige*

1. Figure :



2. Je calcule les coordonnées du point M, milieu de $[AC]$.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{(-3)+5}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$$

Conclusion : Le point M a pour coordonnées $(1;1{,}5)$.

3. Je calcule les coordonnées du point N, milieu de $[BD]$.

$$x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3+(-1)}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1} \qquad y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+(-2)}{2} = \frac{3}{2} = \boxed{1{,}5}$$

Le point N a pour coordonnées $(1;1{,}5)$ donc M et N sont confondus et les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ se coupent en leur milieu d'où $ABCD$ est un parallélogramme.

4. Je calcule BD :

$$\begin{aligned} BD^2 &= (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 \\ &= (-1-3)^2 + (-2-5)^2 \\ &= (-4)^2 + (-7)^2 \\ &= 16 + 49 \\ &= \boxed{65} \end{aligned}$$

Or, $BD \geqslant 0$ donc $\boxed{BD = \sqrt{65}}$.

5. Je calcule AC :

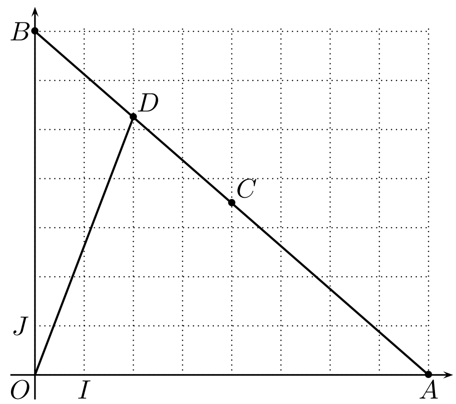
$$\begin{aligned} AC^2 &= (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 \\ &= (5-(-3))^2 + (1-2)^2 \\ &= 8^2 + (-1)^2 \\ &= 64 + 1 \\ &= \boxed{65} \end{aligned}$$

Or, $AC \geqslant 0$ donc $\boxed{AC = \sqrt{65}}$.

Ainsi, le parallélogramme $ABCD$ a ses diagonales de même longueur ($AC = BD = \sqrt{65}$) d'où $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 5 *Seconde/Géométrie-analytique/exo-020/corrige*

1. On peut conjecturer que le triangle OAD est isocèle en A.



2. Je calcule les coordonnées du point C, milieu de $[AB]$.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8+0}{2} = \frac{8}{2} = \boxed{4} \qquad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0+7}{2} = \frac{7}{2} = \boxed{3{,}5}$$

Je calcule les coordonnées du point D, milieu de $[BC]$.

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = \boxed{2} \qquad y_D = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{7+3{,}5}{2} = \frac{10{,}5}{2} = \boxed{5{,}25}$$

Conclusion : Le point C a pour coordonnées $(4;3{,}5)$ et le point D a pour coordonnées $(2;5{,}25)$.

3. Je calcule AD :

$$\begin{aligned} AD^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 \\ &= (2-8)^2 + (5{,}25-0)^2 \\ &= (-6)^2 + 5{,}25^2 \\ &= 36 + 27{,}5625 \\ &= \boxed{63{,}5625} \end{aligned}$$

Or, $AD \geqslant 0$ donc $\boxed{AD = \sqrt{63{,}5625} \approx 7{,}97 \text{ (à } 10^{-2} \text{ près)}}$.

Par ailleurs, $OA = 8$ donc $OA \neq AD$, ce qui permet d'infirmer la conjecture émise à la première question.