Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{|x|-1}$. Cette fonction est-elle dérivable en $x = 0$?

Exercice 2

Soit $g : x \mapsto \sqrt{x^2(1-x)}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.

2. Justifier que g n'est dérivable ni en 0, ni en 1.

3. Interpréter graphiquement les résultats obtenus à la question précédente.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition puis la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x^2+5x+2)^3$ **3.** $f : x \mapsto \sqrt{2x-8}$ **5.** $f : x \mapsto \sqrt{x^4+1}$ **7.** $f : x \mapsto \sqrt{x^2+2x+4}$

2. $f : x \mapsto (x^3-6)^4$ **4.** $f : x \mapsto 5(2x+1)^4$ **6.** $f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x^2+1)^2}$ **8.** $f : x \mapsto \dfrac{6}{(2x+1)^2}$

Exercice 4

Déterminer $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{2014}-1}{x-1}$ par deux méthodes.

Exercice 5

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$ par deux méthodes.

Exercice 6

Soient p et q deux entiers naturels non nuls fixés.
Déterminer les extrema de la fonction f, définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^p(1-x)^q$.

Exercice 7

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x))^3 = x - f(x)$

1. Calculer $f(0)$, puis justifier que si $x \neq 0$ alors $f(x) \neq 0$.

2. Soit x un réel non nul. Démontrer que x et $f(x)$ sont de même signe.

3. Prouver que la fonction dérivée de f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f' sa fonction dérivée, et g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x+1) - f(x) \quad \text{et} \quad h(x) = f(x^3) - (f(x))^2$$

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.

1. Si f' est croissante sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi.

2. Si f' est croissante sur $\mathbb{R}$ alors g l'est aussi.

3. Si f' est positive sur $\mathbb{R}$ alors f l'est aussi.

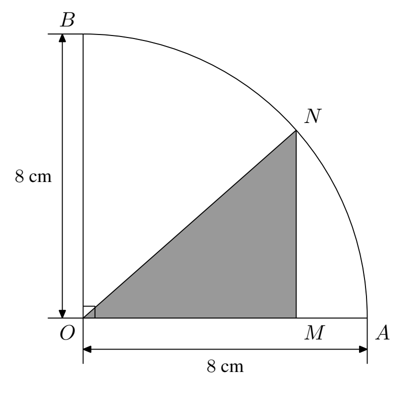
4. Si f' est positive sur $\mathbb{R}$ alors g l'est aussi.

5. Si f est croissante et à valeurs négatives sur $\mathbb{R}$ alors h est croissante sur $\mathbb{R}$.

6. Si f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ et que ce maximum est atteint en $x = 1$ alors le graphe de h admet une tangente horizontale en son point d'abscisse 1.

Exercice 9

Soient un triangle OAB rectangle et isocèle en O tel que $OA = 8\,\text{cm}$ et M un point mobile sur $[OA]$.
La parallèle à (OB) passant par M coupe l'arc de cercle de centre O et d'extrémités A et B en N.
Où faut-il placer le point M pour que l'aire du triangle OMN soit maximale ?



EXERCICE 10

But : Déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (\bigstar)$$

1. La fonction carré vérifie-t-elle $(\bigstar)$?

2. Montrer que si f vérifie $(\bigstar)$ alors $f(0) = 0$.

3. Prouver que si f vérifie $(\bigstar)$ alors sa fonction dérivée f' est constante sur $\mathbb{R}$.

4. En utilisant le résultat de la question **3**, donner une condition nécessaire pour qu'une fonction f vérifie $(\bigstar)$.

5. Conclure.

EXERCICE 11

On admet l'existence d'une fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée f' égale à f, et telle que $f(0) = 1$.
On se propose, dans cet exercice, de démontrer son unicité et d'en découvrir certaines propriétés.

1. Soit $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.
Prouver que g est constante sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f ne s'annule jamais.

2. En raisonnant par l'absurde, prouver que f est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$.

3. Soient h une fonction ayant les mêmes propriétés que f, et $\varphi : x \mapsto \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

a) Montrer que φ est constante sur $\mathbb{R}$.

b) Que peut-on en déduire concernant f ?

EXERCICE 12

On considère un demi-cercle de diamètre $[AB]$ avec $AB = 2$ et H un point libre sur $[AB]$, distinct des extrémités A et B.
La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe le demi-cercle en M et on note P le projeté orthogonal de M sur la tangente en B au demi-cercle.

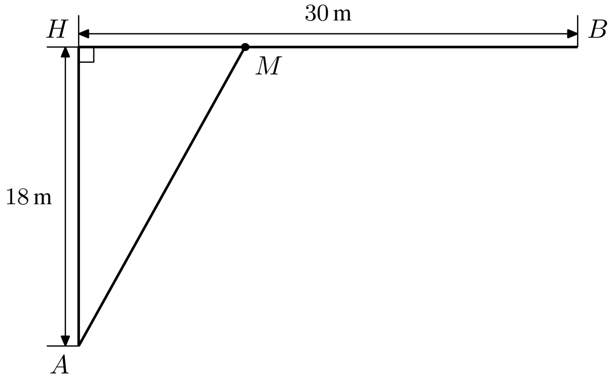
1. Faire une figure et prouver que $MH^2 = HA \times HB$.

2. On pose $x = HB$.
Établir que $AM + MP = x + \sqrt{2(2-x)}$.

3. Déterminer la position du point H pour laquelle la longueur $AM + MP$ de la ligne brisée AMP est maximale. Préciser la valeur de ce maximum.

EXERCICE 13

Albert est un fervent adepte de la plongée sous-marine. Alors qu'il se trouve sous l'eau, en A, et s'émerveille devant la beauté du paysage aquatique, il aperçoit au loin un requin d'une taille qui le dissuade de poursuivre plus avant son exploration des fonds marins et décide de rejoindre son bateau situé en B. À quel endroit M doit-il rejoindre la surface pour que le temps de parcours soit minimal ?



Grâce à l'adrénaline secrétée par la portion médullaire de ses glandes surrénales, Albert se déplace à la vitesse de 7,2 km.h^{-1} sous l'eau et à la vitesse de 9 km.h^{-1} en surface. On supposera que la surface de l'eau, matérialisée par $[HB]$, est rectiligne, que la dérive due au courant est nulle et que la trajectoire d'Albert est une ligne brisée.

Exercice 14

Dans cet exercice, l'unité de longueur est le centimètre.

Le but de cet exercice est de déterminer, parmi tous les triangles isocèles de périmètre égal à 15, celui dont l'aire est maximale.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie, construire un triangle ABC isocèle en A, dont le périmètre est fixé et égal à 15.

Parmi tous les triangles possibles, quelle semble être la nature du triangle d'aire maximale ?

2. On note H le milieu de $[BC]$, x la longueur BC et $\varphi(x)$ l'aire du triangle ABC.

a) Dans quel intervalle le réel x varie-t-il ?

b) Exprimer AH en fonction de x et en déduire que $\varphi(x) = \dfrac{x}{4}\sqrt{225-30x}$.

c) φ' désignant la fonction dérivée de φ, établir que : $\forall x \in [0;7{,}5[\quad \varphi'(x) = \dfrac{45(5-x)}{4\sqrt{225-30x}}$

d) Conclure.

Exercice 15

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$ et f' sa fonction dérivée.

1. Montrer que : $\forall x \in]-1;1[\quad f'(x) = \dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

2. f est-elle dérivable en (-1) ? Justifier.

3. f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

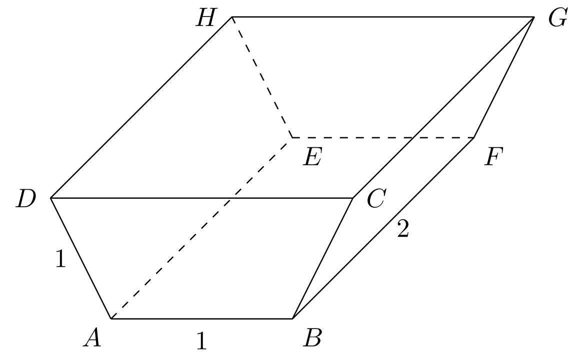
4. Étudier le sens de variation de f sur $[-1;1]$ puis dresser son tableau de variations complet.

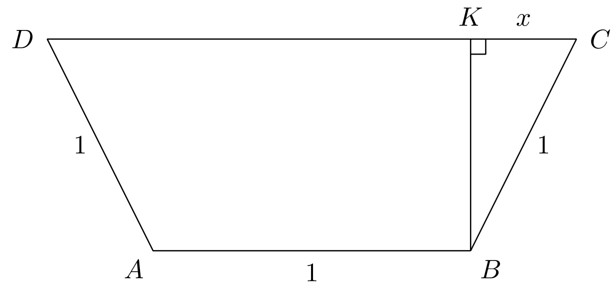
Partie B

Dans cette partie, l'unité de longueur est le mètre.

Une benne a la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.

La longueur CD est variable. Les autres dimensions sont fixes et indiquées sur la figure ci-dessous.





On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1. Calculer l'aire $S(x)$ du trapèze $ABCD$.

2. Exprimer le volume $V(x)$ de la benne en fonction de $f(x)$ où f est la fonction de la première partie.

3. Pour quelle valeur de x, le volume de la benne est-il maximal ? Quel est alors le volume de la benne ?

4. Toujours dans ce cas, quelle est la mesure, en radians, de l'angle $\widehat{CBK}$?

Exercice 16

Soient h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x) = 2x - 3 + \dfrac{1}{x^2}$ et $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

1. On admet que le tableau ci-dessous est le tableau de variations de h sur $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
Var. h	‖ ?	$\searrow$	?	$\nearrow$	?

Déterminer les informations manquantes dans ce tableau.

2. Donner les primitives de h sur $]0;+\infty[$.

3. En déduire la primitive H de h dont la courbe représentative passe par le point $A\,(1;7)$.

4. Justifier, sans effectuer aucun calcul, que H est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 17

f est une fonction définie et dérivable sur $]3\,;+\infty[$ dont on donne ci-dessous le tableau de variations.

x	3		4		$+\infty$
Var. f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

On nomme :

- $\mathscr{C}$, le graphe de f dans un repère orthonormal ;
- f', la fonction dérivée de f ;
- F, la primitive de f sur $]3\,;+\infty[$ qui s'annule en $x = 4$.

Partie A

À chaque question, retrouver toutes les réponses exactes sachant qu'<u>au moins une</u> l'est.

1. $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite d'équation :

❒ $x = 1$; ❒ $y = 1$; ❒ $x = 3$; ❒ $y = 3$.

2. Au vu du tableau de variations de f, on peut affirmer que, sur $]3\,;+\infty[$, la fonction f' est :

❒ à valeurs positives ; ❒ à valeurs négatives ;
❒ croissante ; ❒ décroissante.

3. Au vu du tableau de variations de f, on peut affirmer que la fonction F :

❒ est à valeurs positives sur $]3\,;+\infty[$;
❒ est strictement croissante sur $]3\,;+\infty[$;
❒ décroît sur $]3\,;4]$ et croît sur $[4\,;+\infty[$;
❒ atteint son minimum sur $]3\,;+\infty[$ lorsque $x = 4$.

4. Si H est une autre primitive de f sur $]3\,;+\infty[$ alors on peut affirmer que :

❒ H est à valeurs positives sur $]3\,;+\infty[$;
❒ H décroît strictement sur l'intervalle $]3\,;4]$ et croît strictement sur l'intervalle $[4\,;+\infty[$;
❒ la fonction dérivée de H est f ;
❒ il existe une constante réelle k telle que, pour tout réel x strictement supérieur à 3, $H(x) = F(x) + k$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $]3\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{(x-3)^2}$$

Vérifier que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2 - 8}{x - 3}$ est une primitive de f sur $]3\,;+\infty[$.

Exercice 18

f désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et telle que $f' = -f$, où f' désigne la fonction dérivée de f.
On donne ci-dessous la courbe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x+3)f(x)$. On admet que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à cette courbe en $+\infty$.

1. Pourquoi peut-on affirmer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$?

2. g' désignant la fonction dérivée de g, lire sur le graphique $g(-\frac{3}{2})$, $g(0)$, $g'(-\frac{1}{2})$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et en déduire $f(0)$, $f'(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Calculer $g'(x)$ puis étudier son signe.

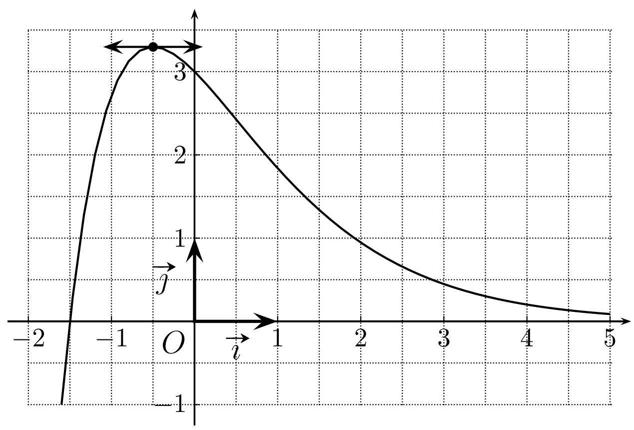
4. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.

5. On note G la primitive de g sur $\mathbb{R}$ dont la courbe passe par l'origine du repère, et H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-2x - 5)f(x)$.

a) Dresser le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que H est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

c) Exprimer $G(x)$ en fonction de x et $f(x)$.



6. Justifier que $\varphi = \dfrac{1}{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que sa fonction dérivée, notée φ', vérifie $\varphi' = \varphi$.

7. Calculer $\varphi(0)$, puis identifier successivement φ et f.